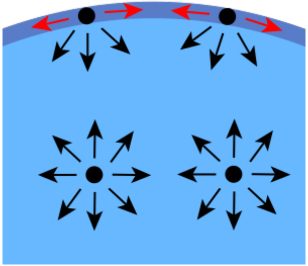
Per què les bombolles són rodones?

Dissabtes de les matemàtiques

Joan Porti (UAB) 11 de març de 2023

Tensió superficial

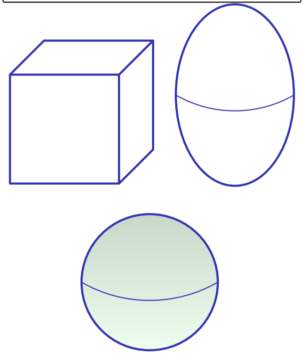


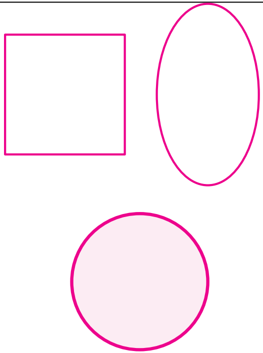
- Les mol·lecules d'un liquid s'atrauen entre elles.
- Les mol·lecules de l'interior estan en equilibri.
- Les mol·lecules de la vora tenen una força cap a l'interior.
- L'energia total és proporcional a l'àrea de la vora.
- Mínima energia:

L'esfera és la forma que minimitza l'àrea que envolta un volum donat.

Teorema isoperimètric (generalitzat)

L'esfera és la superfície que minimitza l'àrea entre les que envolten un volum donat.	La circumferència és la corba que minimitza el perímetre entre les que envolten una àrea donada.	La circumferència és la corba que maximitza l'àrea envoltada per un perímetre fixat.





Les dues versions
(min perimetre/area fixa,
max area/perimetre fix)
són duals
i són equivalents

Teorema isoperimètric o de Dido

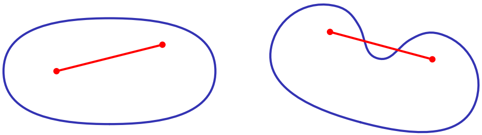
Dido és la fundadora mítica de Carthago (segle IX abans de Crist) segons l'Eneida.

Màxima àrea coberta per una pell de bou: primer en va fer una corda
i després va dibuixar una circumferència amb la corda.

“Demostració” de Jacob Steiner (1842)

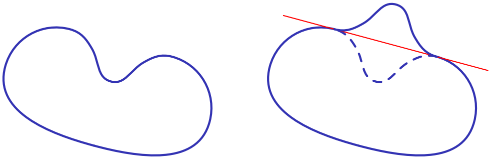
La circumferència és la corba de perímetre fixat que maximitza l‘area que envolta

Primera etapa: Si maximitza l’àrea, la corba és convexa.



corba convexa   corba no convexa

Si no és convexa, trobem una corba amb el mateix perímetre que envolta més àrea

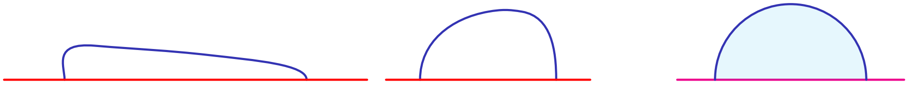


Segona etapa: simetrització de Steiner

- P i Q punts de la corba que la divideixen en dos arcs d'igual longitud.

Lema: Si la corba maximitza l'àrea, aleshores el segment $\overline{PQ}$ divideix la regió en parts d'igual àrea.

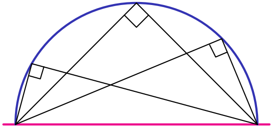
- Si les dues parts tenen àrea diferent, trobem una corba d'igual perímetre que envolta més àrea (una simetria o reflexió).
- Nou problema isoperimètric: Entre els arcs de longitud donada amb extrems (mòbils) en una recta, la semicircumferència maximitza l'àrea envoltada.



Tercera etapa de Steiner: semicircumferències

Entre tots arcs de longitud fixa i extrems (mòbils) en una recta,
la semicircumferència maximitza l'àrea envoltada.

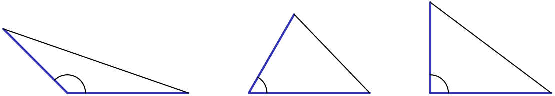
- Caracterització de la semicircumferència:



Els angles d'aquestes cordes són rectes si i només si la corba és una semicircumferència

- Si la corba no és una semicircumferència, trobem un angle que no és recte.

- La nova corba té la mateixa longitud i envolta més àrea.
  - Fixades les longituds de dos costats, el triangle rectangle és el que té més àrea.



La demostració *incompleta* de Steiner (1842)

La circumferència és la corba de perímetre fixat que maximitza l'area que envolta

- Steiner demostra que si una corba no és una circumferència, aleshores hi ha una altra corba amb el mateix perímetre que envolta més àrea.
- Per què la demostració és incompleta?

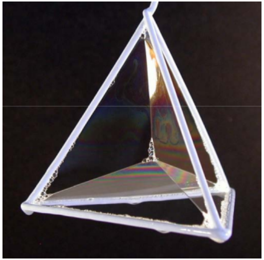
Exemple Enters positius: $1, 2, 3, 4, \ldots$

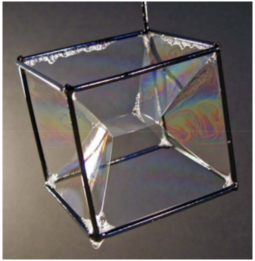
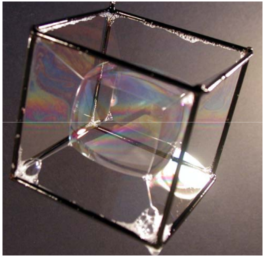
  - "Teorema" fals: 1 és el nombre més gran engtre tots els enters positius.
  - "Demostració:" Donat un nombre enter i positiu diferent de 1, si l'elevem al quadrat, aleshores tenim un enter més gran.
  - Això demostraria que si hi hagués un nombre enter més gran que els altres, aquest nombre seria 1. Però no n'hi ha cap que sigui més gran que els altres.

- A Steiner li falta demostrar que hi ha almenys alguna corba que envolta més àrea que les altres amb perímetre fixat.
- Cal fer passos al límit, etc... utilitzar eines que Steiner no tenia (ni volia). Weierstrass va donar una prova rigorosa el 1870.

Tornem a les pel·licules de sabó

- L'esfera és la superfície que minimitza l'àrea entre les que tanquen un volum fixat. (equivalentment, envolta el màxim volum entre les que tenen una àrea fixada).
- Pot ser que una pel·licula de sabó no tanqui un volum.
  De vegades es troben trossos de superfície en arestes i vèrtexs.

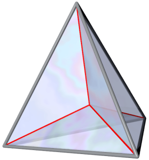


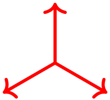
- Les pel·lícules de sabó segueixen les lleis de Plateau

Lleis de Plateau (S. XIX)

1. Les parts llises "tenen curvatura mitjana constant" (curvatura mitjana zero si no és vora d'un volum).
2. Les supefícies es troben de tres en tres en arestes, amb angle $\arccos(-\frac{1}{2}) = 120^\circ$
3. Es poden trobar quatre arestes en un vèrtex com en la configuració d'un tetraedre regular (angles de les arestes és $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.47^\circ$).

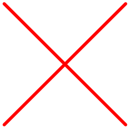


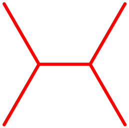
Per què 120°?

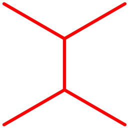


Equilibri de forces

Per què es troben de 3 en 3 no de 4 en 4 a les arestes?

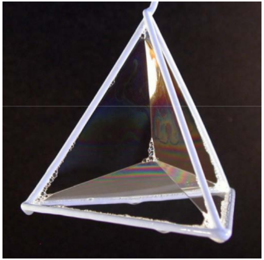


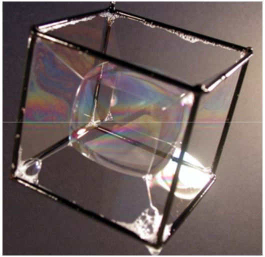




Comprovem les lleis de Plateau en els exemples

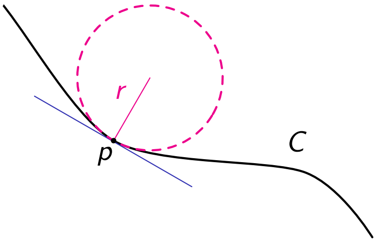
1. Les parts llises "tenen curvatura mitjana constant" (curvatura mitjana zero si no és vora d'un volum).
2. Les supefícies es troben de tres en tres en arestes, amb angle $\arccos(-\frac{1}{2}) = 120^\circ$
3. Es poden trobar quatre arestes en un vèrtex com en la configuració d'un tetraedre regular (angles de les arestes és $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.47^\circ$).



Què és la curvatura mitjana?

Curvatura de corbes planes



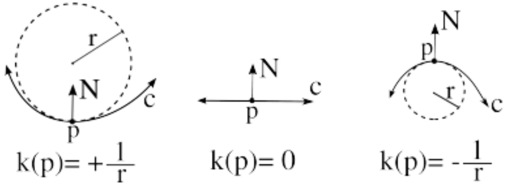
C corba al pla

Cercle osculador: cercle que aproxima millor C

r = radi del cercle osculador

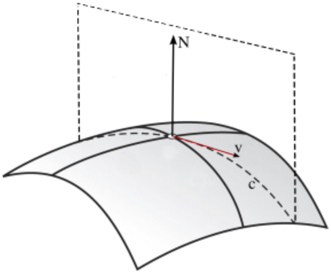
Curvatura: $k(p) = \frac{1}{r}$

- Físicament, és el mòdul d'una força perpendicular que desvia la trajectòria de C.
- Si li posem signe $k = \pm\frac{1}{r}$, és la variació de longitud de C en una direcció perp.

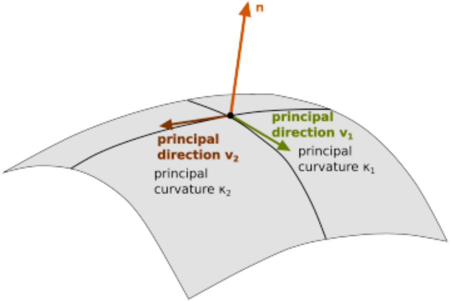


Curvatures principals de superfícies i curvatura mitjana

Per superfícies a l'espai mirem la intersecció amb plans perpendiculars en totes les direccions tangents



Les curvatures principals k_1 i k_2 són el màxim i mínim de les curvatures en totes les direccions

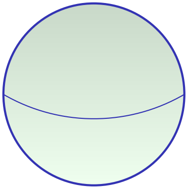


- Curvatura mitjana: $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ (és la mitjana de les curvatures en totes les direccions).
- H és la "primera variació de l'àrea".
  $H = 0$ per les pel·lícules de sabó (que no són vora d'un volum)

Curvatura mitjana $H = \frac{k_1+k_2}{2}$

Esfera

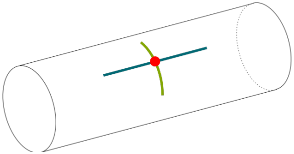
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



$k_1 = k_2 = \frac{1}{r},\ H = \frac{1}{r}$

cilindre

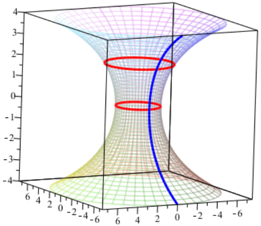
$x^2 + y^2 = r^2$



$k_1 = 0,\ k_2 = \frac{1}{r},\ H = \frac{1}{2r}$

catenoide

rotació d'una catenària

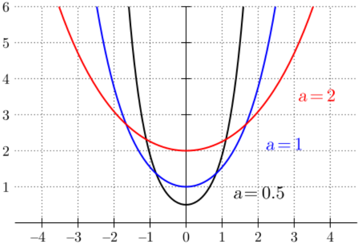


$k_1 = -k_2,\ H = 0$

- L'esfera té curvatura principal constant: apareix en bombolles de sabó que són vora d'un volum.
- El pla i la catenoide tenen curvatura principal zero: apareixen en pel·lícules de sabó que no són la vora de cap volum.
  Les superfícies amb curvatura mitjana $H = 0$ s'anomenen mínimes.

Catenària i catenoide

La catenària és la corba que minimitza l'energia potencial.



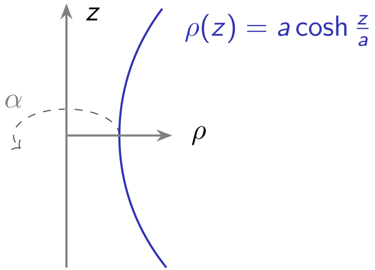
$$y = a\cosh\frac{x}{a} = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

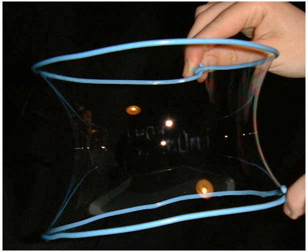
La catenoide s'obté per rotació d'una catenària.

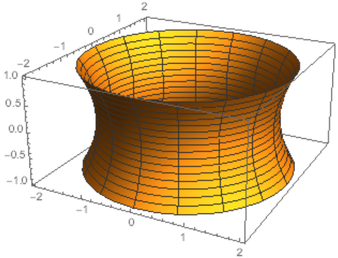
Catenoide (Leonhard Euler 1744)

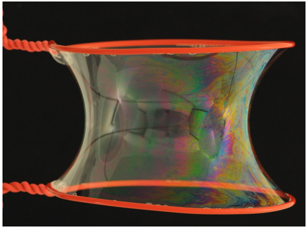
Rotació d'una catenària

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha = a \cosh \frac{z}{a} \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha = a \cosh \frac{z}{a} \sin \alpha \\ z = z \end{cases}$$

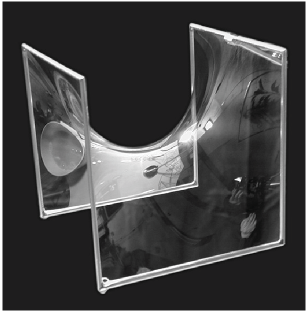


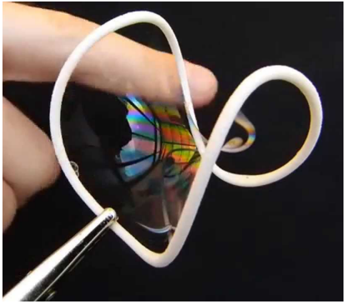


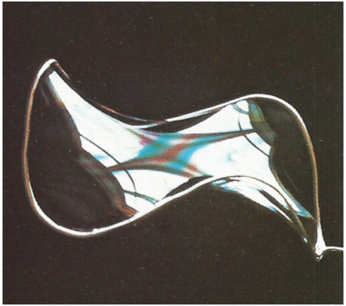




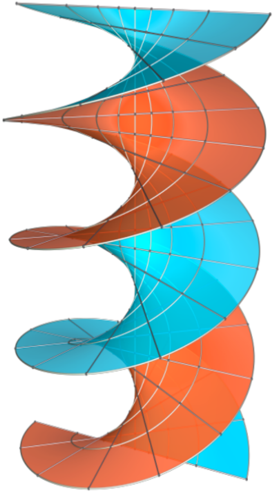
Més superfícies amb curvatura mitjana zero (superfícies mínimes)







Helicoide (Leonhard Euler 1774, Jean Baptiste Meusnier 1776)



Superfície de Costa (Celso José da Costa 1982)