

# La matemàtica, una eina per entendre el món

Armengol Gasull Embid

Universitat Autònoma de Barcelona i Centre de Recerca Matemàtica

gasull@mat.uab.cat

DISSABTES DE LES MATEMÀTIQUES

DISSABTES DE LA FÍSICA

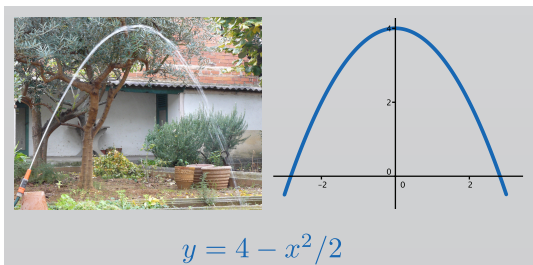
Bellaterra, 4 de Març de 2023



# Objectiu

La matemàtica va néixer com una eina per a **entendre i quantificar el món**, així com per a **poder predir el futur**.

En aquesta xerrada volem il·lustrar aquests aspectes amb **exemples concrets**.



Hi ha diferents tipus de models matemàtics. Molts d'ells estan basats en:

- Equacions diferencials (ordinàries o en derivades parcials),
- Sistemes dinàmics discrets,
- Models aleatoris,

Veurem amb detall alguns exemples.

# Índex de la xerrada

- 1 Predicció del futur?
- 2 Un primer exemple detallat: la població del món
- 3 Efecte papallona
- 4 Rècords
- 5 Altres exemples
- 6 Encara més....

# Índex de la xerrada

- 1 Predicció del futur?
- 2 Un primer exemple detallat: la població del món
- 3 Efecte papallona
- 4 Rècords
- 5 Altres exemples
- 6 Encara més....

Podem predir usant **models matemàtics** dels moviments dels cossos celests:

## Eclipsi solar del 12 d'agost de 2026

L'eclipsi solar del 12 d'agost de 2026 serà un eclipsi solar total. Serà visible a Europa només a Islàndia, Espanya i a l'extrem nord-est de Portugal.

Travessarà Espanya en direcció sud-est durant la tarda, i acabarà amb la posta de sol a les Illes Balears.

Es podrà veure com a eclipsi total a les ciutats de **Lleida, Tarragona**.

En canvi, **Barcelona i Girona** quedaran fora de l'àrea de totalitat i es veurà com a eclipsi parcial.

# Altres eclipsis



- L'últim eclipse total visible des d'Espanya va ser l'any 1905.
- A Europa, l'últim visible va ser l'any 1999.
- El 2 d'agost de 2027 n'hi haurà un altre de total.
- Al gener de 2028 n'hi haurà un d'anular

Eina matemàtica per fer la predicció: [model amb equacions diferencials](#).

# Un rellotge de sol

Aquest rellotge de sol és a casa del meu germà.



Tots els càlculs per la seva construcció els va fer el meu company de departament, Joan Girbau, [sense sortir del seu despatx!](#)

Cada cop que el vaig a veure (de dia) gaudeixo de la seva puntualitat ( $\pm 15$  minuts) i em recorda el poder de les matemàtiques.

# Índex de la xerrada

- 1 Predicció del futur?
- 2 Un primer exemple detallat: la població del món**
- 3 Efecte papallona
- 4 Rècords
- 5 Altres exemples
- 6 Encara més....




Fa uns anys (2019) fullejant la revista PRONTO vaig trobar aquesta notícia:

## El mundo tendrá 9.700 millones de habitantes en el 2050

A pesar de ser una cifra altísima, el crecimiento en los últimos años es inferior al esperado

FOTO: ISTOCK



La ONU ha publicado su informe bianual sobre población, en el que se han podido saber datos como que en el 2050 el mundo tendrá 9.700 millones de habitantes, un notable aumento, teniendo en cuenta que actualmente somos 7.700 millones. La organización también facilita datos para el 2100, cuando habrá 11.000 millones de personas.

A pesar de que los números son realmente altos, el crecimiento que se espera es inferior al que se preveía hace dos años. En el informe también se habla del envejecimiento del planeta, «debido al aumento de la esperanza de vida al nacer y la disminución de los niveles de fecundidad». ■

Com es fa per predir aquests resultats?

Veurem en aquest primer exemple tot l'esquema de la modelització matemàtica.

- Observació de la realitat.
- Llei quantitativa proposada per modelitzar-la.
- Càlculs matemàtics.
- Comprovació de la coherència dels resultats.
- Prediccions.

Seguirem el treball:

A. Gasull, J. Torregrosa. *Models de població del món i prediccions*, Materials Matemàtics 2009(4), 1-20, 2009

En aquest treball només s'usen dades fins a 2005.

# El treball a Materials Matemàtics



**MAT<sup>2</sup>**

**MATerials MATemàtics**

Volum 2009, treball no. 4, 20 pp. ISSN: 1887-1097

Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques  
de la Universitat Autònoma de Barcelona

[www.mat.uab.cat/matmat](http://www.mat.uab.cat/matmat)

## Models de població del món i prediccions

Armengol Gasull, Joan Torregrosa

La dinàmica de poblacions intenta descriure i predir com evoluciona la població d'una o varies espècies al llarg del temps. En aquest treball considerarem només el cas d'una espècie i més concretament el cas de la població humana. El que pretenem és, en poques paraules, predir com evolucionarà la població del món a partir de dades disponibles (estimades) de la població humana durant els darrers vint segles. L'existència de tauletes babilòniques d'argila, amb una antiguitat estimada de més de 3600 anys, mostra la preocupació que ja tenien en aquella època per un excés de



## Observació de la realitat

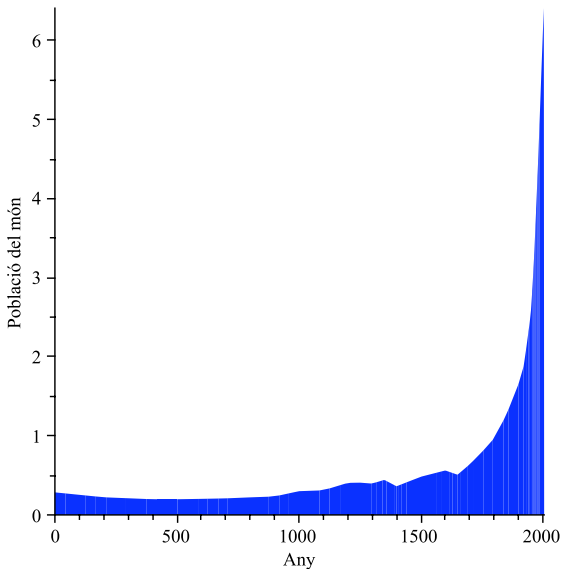
$t$	$P(t)$
0	0.285
200	0.223
400	0.198
500	0.198
600	0.203
700	0.209
800	0.222
900	0.233
1000	0.300
1100	0.311
1200	0.405
1250	0.408
1300	0.396

$t$	$P(t)$
1350	0.443
1400	0.362
1500	0.483
1600	0.562
1650	0.508
1700	0.640
1750	0.795
1800	0.969
1850	1.265
1900	1.656
1910	1.750
1920	1.860
1930	2.070

$t$	$P(t)$
1940	2.300
1950	2.535
1955	2.771
1960	3.032
1965	3.343
1970	3.699
1975	4.076
1980	4.451
1985	4.855
1990	5.295
1995	5.719
2000	6.124
2005	6.515

Taula 1: Població del món en milers de milions entre l'any 0 i el 2005.

# Observació de la realitat-II



# Llei quantitativa proposada per modelitzar-la

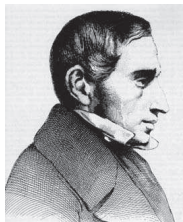
- $P(t)$  denota la població a l'instant  $t$ .
- $\frac{P'(t)}{P(t)}$  denota la taxa de creixement de la població.
- Molts **models matemàtics de població** són **equacions diferencials** de la forma

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = F(P(t)),$$

on  $F$  determina el model.

- Pel model de Verhulst  $F(P) = a + bP$ .

# Llei quantitativa proposada: model de Verhulst

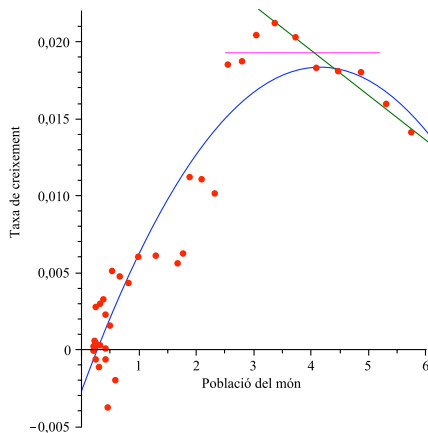


Pierre François Verhulst (1804-1849) va ser un matemàtic belga, especialista en teoria de nombres, conegut precisament per introduir el 1825 el model que rep el seu nom, també anomenat model logístic.

Model:

$$P'(t) = P(t)(a + bP(t)).$$

## Càlculs matemàtics: determinació dels paràmetres



Els punts són  $(P, P'/P)$  on usem que

$$P'(t_i) \approx \frac{P(t_{i+1}) - P(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$



# Càlculs matemàtics: solució de l'equació diferencial

Usant dades des de 1965 (població 3.343) fins a 2005 obtenim:

$$F(P) = 0.0311338 - 0.00292213P$$

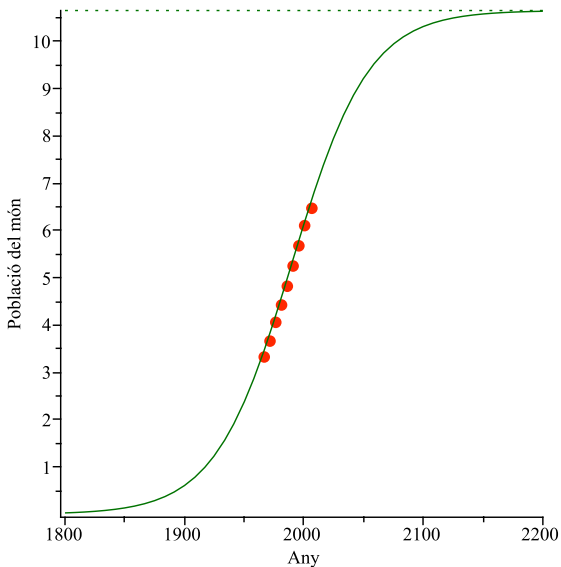
i, per tant, el model és:

$$P' = P(0.0311338 - 0.00292213P), \quad P(1965) = 3.343,$$

amb solució:

$$p(t) = \frac{0.1040802934}{0.02136511941 e^{0.0311338(1965-t)} + 0.00976868059}$$

# Comprovació de la coherència.



## Comprovació de la coherència i prediccions.

Any	Dades reals	Model Verhulst
1960	3.032	2.997
1965	3.343	3.343
1970	3.699	3.696
1975	4.076	4.092
1980	4.451	4.475
1985	4.855	4.896
1990	5.295	5.321
1995	5.719	5.718
2000	6.124	6.140
2005	6.515	6.526

Any	Model Verhulst
2010	6.924
2020	7.634
2030	8.259
2040	8.785
2050	9.220
2100	10.317
2150	10.581
2200	10.638
2250	10.651
2300	10.654

Taula 2: Predicció de la població del món usant el model de Verhulst.

# Prediccions.

Any	Model Verhulst
2010	6.924
2020	7.634
2030	8.259
2040	8.785
2050	9.220
2100	10.317
2150	10.581
2200	10.638
2250	10.651
2300	10.654

- El model **va preveure** que s'arribaria a  $7 \times 10^9$  l'any **2011** i va passar!
- El model **va preveure**  $7.634 \times 10^9$  per **2020**. L'any 2020 érem uns  $7.7 \times 10^9$ .
- El model **preveu**  $9.22 \times 10^9$  per **2050**. La ONU,  $9.7 \times 10^9$ .



## Avui en dia

De nou, fullejant la revista PRONTO (novembre 2022) vaig trobar:

El último perdido,

OS

fiesta  
en Ho-  
ofre-  
para  
48°  
Mick  
y Coo-  
Brody,  
Toro,  
eBron  
Malek,  
uire y  
nos de  
zaron  
n Be-

## El habitante ocho mil millones ha nacido ya

Damián, nacido en la República Dominicana, ha sido elegido, simbólicamente, como esa persona



FOTO: EFE

El pasado 15 de noviembre, en esta mota de polvo del universo que es la Tierra, nos juntamos 8.000 millones de personas, un hito que es fruto del frenético crecimiento de la población, a un ritmo de unos 135 millones de personas más cada año.

Damián, que nació el pasado 15 de noviembre en Santo Domingo (República Dominicana) con un peso de 2,77 kilos y midió 52 centímetros, ha sido elegido, simbólicamente, como ese habitante 8.000 millones de los humanos que habitamos este planeta.

### Megaurbes verdes

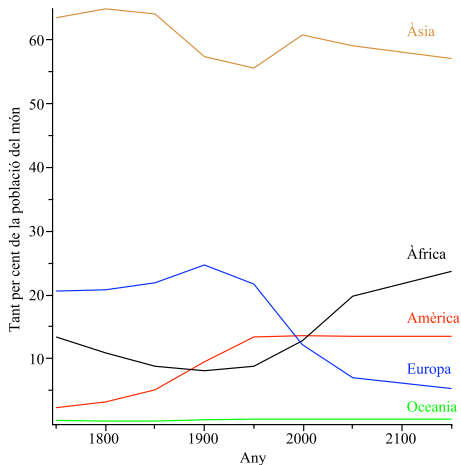
También se estima que, para el año 2050, 7 de cada 10 personas viva en una megaurbe, es decir, en una ciudad de dimensiones colosales, con edificios cada vez más altos y más áreas verdes y con un gran desarrollo tecnológico para optimizar el transporte y las comunicaciones. ■



- Es un projecte interessant refer les prediccions usant les noves dades.

# Algunes reflexions

- El model funciona tot i la seva simplicitat.
- Es interessant reflexionar que malgrat la falta d'homogeneïtat dels països i els continents, mirar-ho tot en conjunt ho fa més simple.



# Índex de la xerrada

- 1 Predicció del futur?
- 2 Un primer exemple detallat: la població del món
- 3 Efecte papallona**
- 4 Rècords
- 5 Altres exemples
- 6 Encara més....

# Caos i efecte papallona

Potser heu sentit que en molts **models de la realitat** els problemes per a obtenir **previsions fiables** venen de que el model presenta:

- Caos, o
- Dependència sensible respecte a les condicions inicials (efecte papallona).

Avui parlarem només d'aquesta segona propietat, i explicarem per què quan es dóna és **molt difícil obtenir prediccions a llarg termini**.

Entrar en més detalls sobre el Caos donaria lloc a una xerrada sencera.



# Efecte papallona

Es diu que hi ha efecte papallona quan **petites variacions** en les condicions inicials d'un model (**com passa a l'atmosfera quan una papallona mou les ales**) poden produir **grans variacions** en el comportament del mateix a llarg termini.



# Efecte papallona al cinema



# Números de Fibonacci

## Els avantpassats d'un abellot



$a_n$  = avantpassats en la generació  $n$

$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 3$$

$$a_4 = 5$$

$a_{n-1}$  enèsim nombre  
de Fibonacci

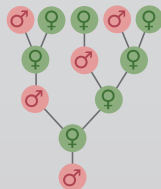


Figura del punt de llibre: **Biologia Matemàtica**, À. Calsina i S. Cuadrado.

# Números de Fibonacci-II

Els números de Fibonacci,  $F_n$  s'obtenen a partir de la següent recurrència:

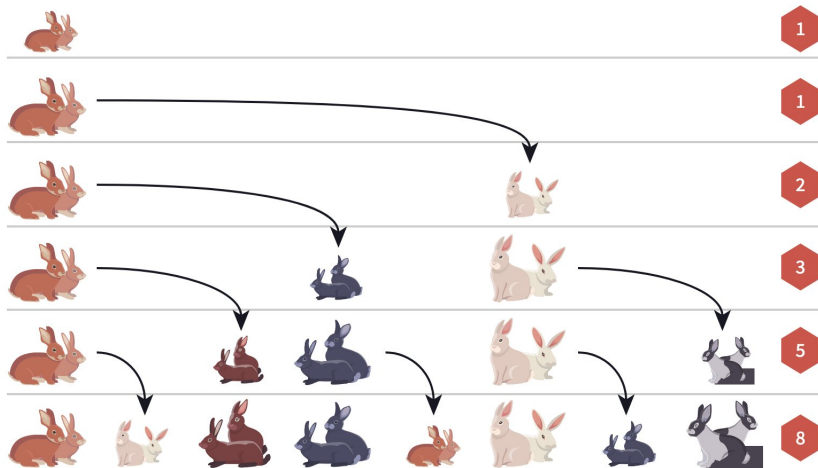
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 1, F_1 = 1.$$

Així, els primers són:

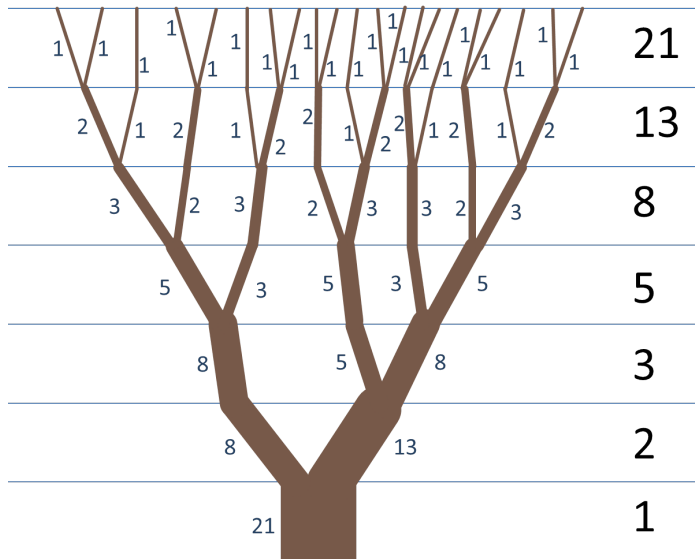
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

i van ser introduïts per Leonardo de Pisa (1175-1250), també conegut com a Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci per a modelar una **població de conills**.

# Números de Fibonacci i parelles de conills



# Arbre de Fibonacci



# Una recurrència similar amb efecte papallona

Considerem la següent recurrència:

$$X_{n+2} = \frac{13}{3}X_{n+1} - \frac{4}{3}X_n, \quad X_0 = 1, X_1 = \frac{1}{3}.$$

Així,

$$X_2 = \frac{13}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \times 1 = \frac{13}{9} - \frac{12}{9} = \frac{1}{9}.$$

Els valors  $X_n$  són:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \dots$$

i, per tant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

# Una recurrència similar amb efecte papallona-II

Compararem ara les dues successions

$$X_{n+2} = \frac{13}{3}X_{n+1} - \frac{4}{3}X_n, \quad X_0 = 1, X_1 = 0.333333333333333 \dots = \frac{1}{3}.$$

$$Y_{n+2} = \frac{13}{3}Y_{n+1} - \frac{4}{3}Y_n, \quad Y_0 = 1, Y_1 = 0.333\ 333.$$



$n$	$X_n$	$Y_n$
0	1.0000000000	1.000000000
1	0.3333333333	0.333333000
2	0.1111111111	0.111109666
3	0.0370370370	0.037031222
4	0.0123456790	0.012322407
5	0.0041152263	0.004022135
6	0.0013717421	0.000999378
7	0.0004572473	-0.00103220
8	0.0001524157	-0.00580540
9	0.0000508052	-0.02378046
10	0.0000169350	-0.09530815
11	0.0000056450	-0.38129471
	...	...
20	$2.867 \times 10^{-10}$	-99955.60252

De fet

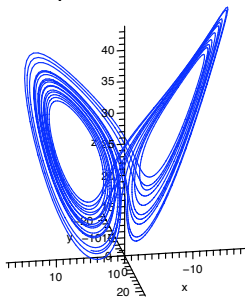
$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = -\infty.$$

# Efecte papallona al model de Lorenz

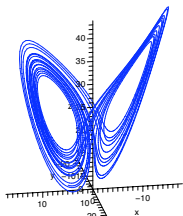
El sistema d'equacions diferencials de Lorenz, matemàtic i meteoròleg nord-americà (1917-2008), és

$$\begin{cases} x' = 10(y - x), \\ y' = 28x - y - xz, \\ z' = -\frac{8}{3}z + xy, \end{cases}$$

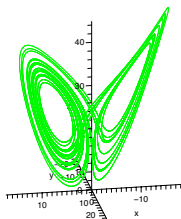
i va ser introduït com un model simplificat per a estudiar l'atmosfera. Aquí  $x$  té a veure amb la convecció i  $y$  i  $z$  són temperatures.



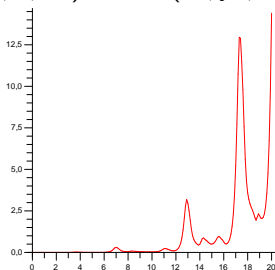
## Efecte papallona al model de Lorenz



$$(x_0, y_0, z_0) = (2, 5, 20)$$



$$(x_0, y_0, z_0) = (2, 5, 20.001)$$



Diferència entre les dues  $x(t)$

# Índex de la xerrada

- 1 Predicció del futur?
- 2 Un primer exemple detallat: la població del món
- 3 Efecte papallona
- 4 Rècords**
- 5 Altres exemples
- 6 Encara més....

# El nombre de rècords

Tots hem sentit alguna vegada una frase similar a:

- Aquest més de febrer és el més calorós que recordo,
- Aquesta tardor és la que més pluja ha tingut en aquest segle,
- ...

Donada una successió **ordenada** de **dades diferents**:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_N,$$

direm que  $X_k$  és un rècord si el seu valor és més gran que tots els anteriors de la successió.

Així, per exemple, els valors en vermell de la següent successió són rècords:

10, 7, 1, 9, 12, 11, 3, 6, 0, 27, 12, 22, 5, 2, 1, 77, 29, 50, ...

# Tornados



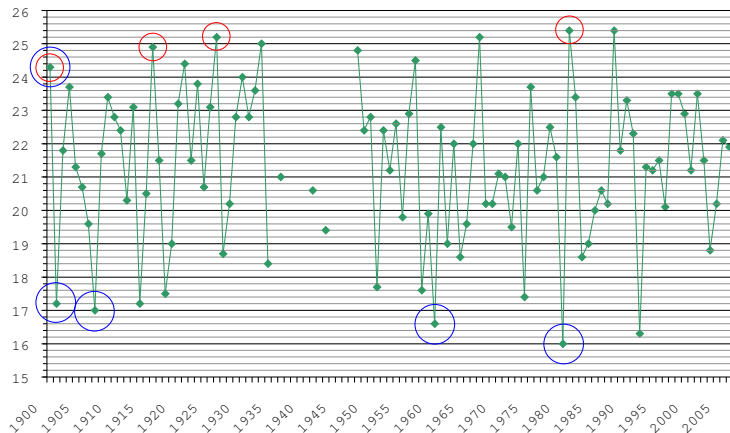
Per exemple, considerem el nombre anual de tornados a Illinois entre 1956 i 2004.

En aquests 49 anys, els rècords del nombre de tornados van ser durant els anys 1956 (el primer any sempre és un rècord), 1957, 1973, 1974 i 2003, és a dir **5 records**.

**Podríem predir que 5 és el nombre esperat de rècords en aquest període?**

# Temperatura màxima a Barcelona

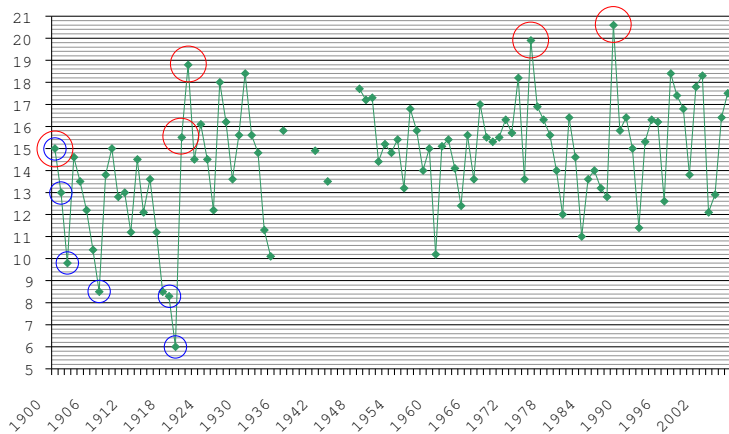
Temperatura **màxima** a Barcelona el 17 d'octubre durant el període 1900-2006 segons la Vanguardia



Rècords: **4** o **5**.

# Temperatura mínima a Barcelona

Temperatura **mínima** a Barcelona el 17 d'octubre durant el període 1900-2006 segons la Vanguardia:



Rècords: **5** o **6**.



El resultat matemàtic que hi ha darrera és:

**Teorema.** Siguin  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatòries contínues, independents i idènticament distribuïdes. Aleshores [el número esperat de rècords](#) de la successió  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  és

$$\text{Núm. esperat de rècords} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} := h_n.$$

La prova d'aquest resultat es basa en la [teoria de la probabilitat](#). Per exemple, els valors  $\frac{1}{k}$  apareixen per què totes les variables són idènticament distribuïdes i la probabilitat de que  $X_k$  sigui un rècord és precisament  $\frac{1}{k}$ .

# Un treball relacionat

Aquests exemples i una explicació detallada es pot trobar a:



MATerials MATemàtics  
 Volum 2007, treball no. 3, 14 pp. ISSN: 1887-1097  
 Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques  
 de la Universitat Autònoma de Barcelona  
[www.mat.uab.cat/matmat](http://www.mat.uab.cat/matmat)

Quants rècords veurem al  
 llarg de la nostra vida?\*

Xavier Bardina

## 1 Introducció i exemple

Les situacions extremes sempre han estat observades amb gran interès. En manuscrits antics ja es troben textos sobre estius extraordinàriament freds, sobre inundacions, sobre temperatures molt elevades, etc...

Naturalment hom s'interessa també en els rècords d'altres disciplines. Per exemple, *El llibre Guinness dels Rècords* (veure [5]) és molt popular a tot el món i sovint se'n treuen noves versions.

El punt de vista de la teoria probabilística dels rècords permet demostrar alguns resultats curiosos. Per exemple, en aquest treball veurem que si suposem que la variable *cota màxima de neu que cau a l'hivern* s'ajusta al nostre model, de mitjana, un nen d'onze anys haurà vist en la seva vida 3 rècords mentre que un avi de 83 anys n'haurà viscut només 5.

D'altra banda, aquest estudi no in-



Jon. Fotografia: Elisenda Vila

## Resultat matemàtic: com calcular $h_n$

El valor  $h_n$  té molt a veure amb la coneguda com sèrie harmònica, que constitueix el primer exemple de suma d'infinits nombres, **cada cop més petits**, però que suma "infinit":

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty.$$

La prova més antiga d'aquest fet, és de voltants de 1350 i s'atribueix al filòsof francès Nicole Oresme (1323-1382).



# Resultat matemàtic: com calcular $h_n$

La prova d'Oresme és:

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
 &\quad + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{17} + \dots \\
 &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty.
 \end{aligned}$$

La suma s'acosta molt poc a poc cap a infinit. Per exemple:

$$h_{1000} = \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k} = 7.485\dots, \quad h_{10^6} = \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{k} = 14.39\dots, \quad h_{10^9} = \sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k} = 21.30\dots$$

# Com calcular $h_n$ i la constant $\gamma$ d'Euler

Euler, el 1731, va provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n - \ln(n)) = \gamma,$$

on  $\gamma$  és precisament el número que avui en dia anomenem constant d'Euler i que és una de les constants més famoses a matemàtiques, encara que no tant com  $\pi$  o  $e$ .

- El seu valor és  $\gamma \approx 0.577218$ .
- Mascheroni la va calcular l'any 1790 amb **dinou** xifres decimals correctes,
- L'any 1812, Gauss la va obtenir amb **quaranta** xifres significatives.
- Avui en dia encara no se sap si  $\gamma$  és racional o irracional.
- A nivell pràctic:

$$h_n \approx \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n} \approx 0.577218 + \ln(n) + \frac{1}{2n}.$$

# Com calcular $h_n$ i la constant $\gamma$ d'Euler



$n$	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^9$
$h_n$	2.93	5.19	7.49	9.79	12.09	14.39	21.30
$\gamma + \ln(n) + 1/(2n)$	2.93	5.19	7.49	9.79	12.09	14.39	21.30

Valors de  $h_n$  amb dues xifres decimals significatives i les seves aproximacions  $\gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n}$ .

# Tornem a les aplicacions

- El número de rècords de tornados entre 1956 i 2004 (49 anys) era 5. Tenim que:  $h_{49} \approx 4.479$ .
- Rècords amb les temperatures màximes i mínimes entre 1900 i 2006 (només 97 anys, degut als anys sense mesures) eren 4, 5, 5, 6. Tenim que:  $h_{97} \approx 5.157$ .



Es poden trobar moltes més aplicacions: terratrèmols amb magnitud major que 6.5, quantitat de pluja, ...

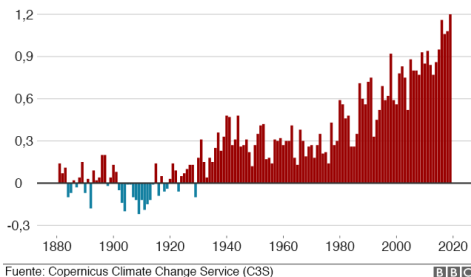
Per exemple, si considerem que la variable **cota màxima de neu que cau a l'hivern** s'ajusta al nostre model, de mitjana, un nen d'onze anys ja haurà vist en la seva vida **3 rècords** mentre que un avi de 83 anys n'haurà viscut **només 5**.

# Canvi climàtic

Aquest punt de vista ens pot servir com a eina estadística per a ratificar que estem vivint un **canvi climàtic**.

## Julio es cada vez más caliente

En comparación con el promedio global 1850-1900, °C



Si hi ha **molts més** rècords dels esperats es pot assegurar que alguna de les hipòtesis que hem fet no es compleix. Així, o bé les variables aleatòries **no són independents** o bé **no tenen la mateixa distribució**. Aquest segon cas ens diria que **el clima esta canviant**.



# Índex de la xerrada

- 1 Predicció del futur?
- 2 Un primer exemple detallat: la població del món
- 3 Efecte papallona
- 4 Rècords
- 5 Altres exemples**
- 6 Encara més....

# Uns quants models més

Per acabar comentarem breument **uns quants exemples més** de models matemàtics:

- Perquè es veu l'arc de Sant Martí doble?
- Llei de Newcomb-Benford
- Com s'absorbeix un medicament o l'alcohol a la sang?
- Com funciona la datació per  $C^{14}$ ?
- Quant triga a buidar-se un dipòsit d'aigua?
- Com seria una clepsidra (rellotge d'aigua) ideal?
- Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?
- ...

# Uns quants models més

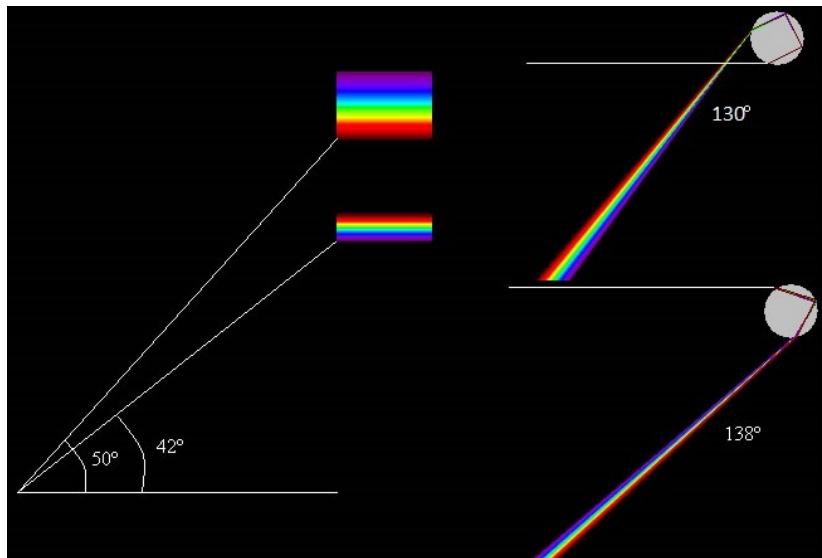
- Perquè es veu l'arc de Sant Martí doble?
- Llei de Newcomb-Benford
- Com s'absorbeix un medicament o l'alcohol a la sang?
- Com funciona la datació per  $C^{14}$ ?
- Quant triga a buidar-se un dipòsit d'aigua?
- Com seria una clepsidra (rellotge d'aigua) ideal?
- Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?
- ...

# Perquè es veu l'arc de Sant Martí doble?



Port de Sóller, febrer 2023.

# Perquè es veu l'arc de Sant Martí doble?



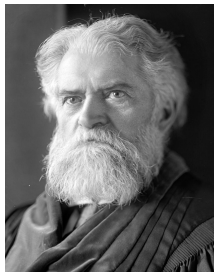
# Uns quants models més

- Perquè es veu l'arc de Sant Martí doble?
- **Llei de Newcomb-Benford**
- Com s'absorbeix un medicament o l'alcohol a la sang?
- Com funciona la datació per  $C^{14}$ ?
- Quant triga a buidar-se un dipòsit d'aigua?
- Com seria una clepsidra (rellotge d'aigua) ideal?
- Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?
- ...

# Llei de Newcomb-Benford

La **Llei de Newcomb-Benford** va ser descoberta el 1881 per l'astrònom americà Simon Newcomb, quan va adonar-se que a les **taules de logaritmes** les pàgines del nombres que començaven amb 1,2,3 estaven molt més desgastades que les altres pàgines.

Aquesta llei va ser **redescoberta** el 1938 pel físic americà Frank Benford, qui la va observar en dades de més 20 dominis diferents. De fet avui en dia a molts llocs es coneix simplement com **lleï de Benford**.



S. Newcomb

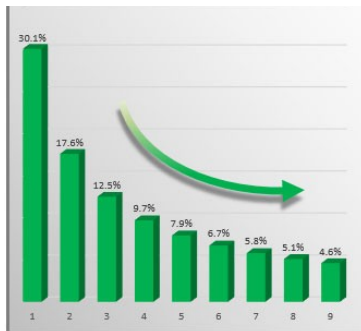


F. Benford

# Llei de Newcomb-Benford

En poques paraules la **Llei de Newcomb-Benford** és una distribució de probabilitat que ens dóna la freqüència del primer dígit en molts (però no tots) conjunts de dades extrets de la vida real.

Per exemple, en aquesta distribució el nombre 1 apareix com a primer dígit en aproximadament el 30% dels casos, mentre que els altres nombres apareixen en aquesta posició amb menys freqüència.





## Treball d'en Benford

Title	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Count
Rivers, Area	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
Population	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
Constants	41.3	14.4	4.8	8.6	10.6	5.8	1.0	2.9	10.6	104
Newspapers	30.0	18.0	12.0	10.0	8.0	6.0	6.0	5.0	5.0	100
Spec. Heat	24.0	18.4	16.2	14.6	10.6	4.1	3.2	4.8	4.1	1389
Pressure	29.6	18.3	12.8	9.8	8.3	6.4	5.7	4.4	4.7	703
H.P. Lost	30.0	18.4	11.9	10.8	8.1	7.0	5.1	5.1	3.6	690
Mol. Wgt.	26.7	25.2	15.4	10.8	6.7	5.1	4.1	2.8	3.2	1800
Drainage	27.1	23.9	13.8	12.6	8.2	5.0	5.0	2.5	1.9	159
Atomic Wgt.	47.2	18.7	5.5	4.4	6.6	4.4	3.3	4.4	5.5	91
$n^{-1}, \sqrt{n}$	25.7	20.3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
Design	26.8	14.8	14.3	7.5	8.3	8.4	7.0	7.3	5.6	560
Digest	33.4	18.5	12.4	7.5	7.1	6.5	5.5	4.9	4.2	308
Cost Data	32.4	18.8	10.1	10.1	9.8	5.5	4.7	5.5	3.1	741
X-Ray Volts	27.9	17.5	14.4	9.0	8.1	7.4	5.1	5.8	4.8	707
Am. League	32.7	17.6	12.6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
Black Body	31.0	17.3	14.1	8.7	6.6	7.0	5.2	4.7	5.4	1165
Addresses	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
$n, n^2, \dots, n!$	25.3	16.0	12.0	10.0	8.5	8.8	6.8	7.1	5.5	900
Death Rate	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
Average	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011
Benford's Law	30.1	17.6	12.5	9.7	7.9	6.7	5.8	5.1	4.6	

## Quina és la llei de Newcomb-Benford?

Es diu que una variable aleatòria discreta  $X$  té distribució de Newcomb-Benford si:

- Pren els valors  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ , i a més

$$p_k = P(X = k) = \log_{10} \left( \frac{1+k}{k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, 9.$$

Observem que

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \dots + p_9 &= \log_{10}(2) + \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \log_{10}\left(\frac{10}{9}\right), \\ &= \log_{10}(2) + (\log_{10}(3) - \log_{10}(2)) + (\log_{10}(4) - \log_{10}(3)) + \dots + \\ &\quad (\log_{10}(9) - \log_{10}(8)) + (\log_{10}(10) - \log_{10}(9)) = \log_{10}(10) = 1. \end{aligned}$$

Així, per exemple:

- $P(X = 1) = \log_{10}(2) = 0.301030\dots$
- $P(X = 5) = \log_{10}(6/5) = 0.079181\dots$
- $P(X = 9) = \log_{10}(10/9) = 0.045757\dots$

## Perquè apareix la llei de Newcomb-Benford?

Una de les explicacions més acceptades és que aquesta llei apareix per què és **la única invariant per canvis d'escala**.

Així, per exemple, si es dona quan considerem llargades de rius en Km. també s'ha de donar quan els mesurem en milles!

Matemàticament, aquest fet s'acaba traduït en que

$$P(X = k) = \log_{10} \left( \frac{1+k}{k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, 9.$$

Més informació a:

E. Janvresse i T. de la Rue, [La llei de Benford](#). Butl. Soc. Catalana Mat. 24 (2009), 5–12.

# Un exemple d'aparició de la llei de Newcomb-Benford

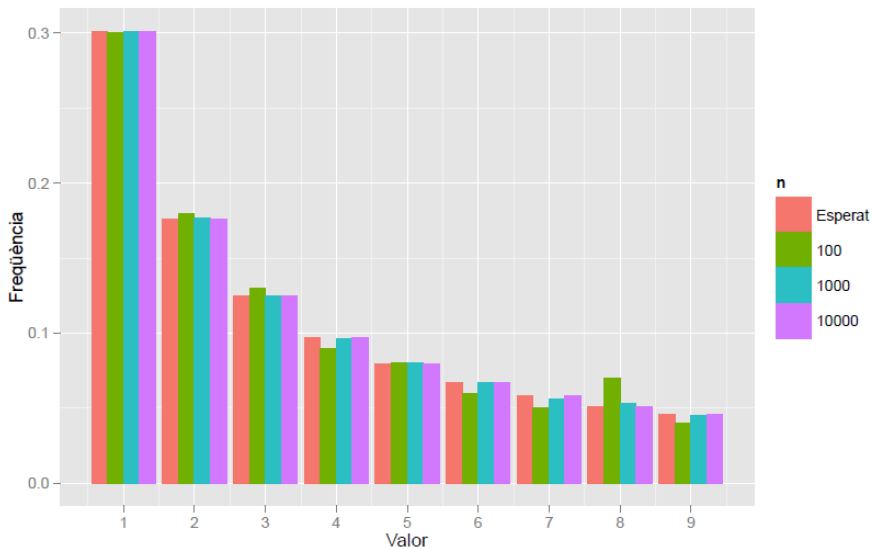
Valor	Freq esp	Freq obs ( $n = 100$ )	Freq obs ( $n = 1000$ )	Freq obs ( $n = 10000$ )
1	0.3010	0.3000	0.3010	0.3011
2	0.1761	0.1800	0.1770	0.1762
3	0.1249	0.1300	0.1250	0.1250
4	0.0969	0.0900	0.0960	0.0968
5	0.0792	0.0800	0.0800	0.0792
6	0.0669	0.0600	0.0670	0.0668
7	0.0580	0.0500	0.0560	0.0580
8	0.0512	0.0700	0.0530	0.0513
9	0.0458	0.0400	0.0450	0.0456

## Primera xifra dels números de Fibonacci

Al article següent **es demostra** que els números de Fibonacci satisfan la llei de Newcomb-Benford:

L. C. Washington, [Benford's law for Fibonacci and Lucas numbers](#). Fibonacci Quart. 19 (1981), 175--177.

# Primera xifra dels números de Fibonacci



## Altres aplicacions de la llei de Newcomb-Benford

Com passa amb algunes descobertes matemàtiques, la llei de Newcomb-Benford ha estat molt temps una curiositat sense cap aplicació pràctica.

Però als anys noranta del segle passat l'economista americà Mark Nigrini va suggerir la utilització de tests basats en aquesta llei per a **la detecció de dades falsificades**.

Nigrini va demostrar que un examen acurat dels nombres que sortien a la comptabilitat d'un negoci podia permetre a un comptable expert detectar possibles fraus.

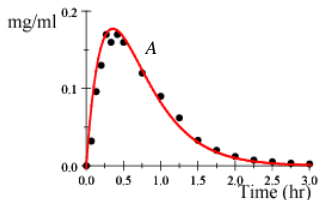
De fet, l'experiència mostra que les dades autèntiques han de seguir la llei de Newcomb-Benford. Al contrari, qui inventa nombres té tendència a sobreestimar l'aparició de 5 i 6.

Recentment també s'ha intentat usar per a detectar **possibles fraus electorals**.

# Uns quants models més

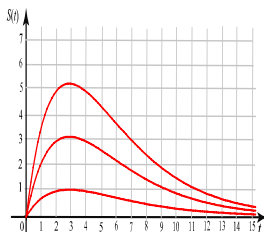
- Perquè es veu l'arc de Sant Martí doble?
- Llei de Newcomb-Benford
- Com s'absorbeix un medicament o l'alcohol a la sang?
- Com funciona la datació per  $C^{14}$ ?
- Quant triga a buidar-se un dipòsit d'aigua?
- Com seria una clepsidra (rellotge d'aigua) ideal?
- Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?
- ...

# Com s'absorbeix l'alcohol a la sang?



$$S(t) = at \cdot b^t$$

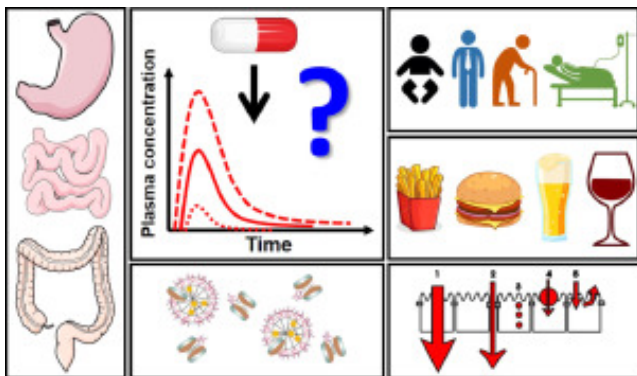
$$(a > 0, 0 < b < 1)$$



Imatge extreta de la xerrada: [How Math Models the Real World \(and how it does not\)](#) de Saleem Watson de la California State University.



# Com s'absorbeix un medicament a la sang?



Imatge d'un article del [European Journal of Pharmaceutical Sciences](#)

# Uns quants models més

- Perquè es veu l'arc de Sant Martí doble?
- Llei de Newcomb-Benford
- Com s'absorbeix un medicament o l'alcohol a la sang?
- **Com funciona la datació per  $C^{14}$ ?**
- Quant triga a buidar-se un dipòsit d'aigua?
- Com seria una clepsidra (rellotge d'aigua) ideal?
- Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?
- ...

# Datació per $C^{14}$



# Com funciona la datació per $C^{14}$ ?

- És una tècnica descoberta i desenvolupada pel físic-químic nord-americà Willard Frank Libby en l'any 1949, que li va valer premi Nobel de química el 1960.
- La idea principal és que la quantitat de carboni 14 té una concentració uniforme en tots els éssers vius, i aquesta **comença a disminuir quan moren**, degut a la desintegració radioactiva.
- Sigui  $x(t)$  la quantitat de  $C^{14}$  a l'instant  $t$ . Aleshores **la velocitat de desintegració és proporcional a la quantitat del element**, és a dir

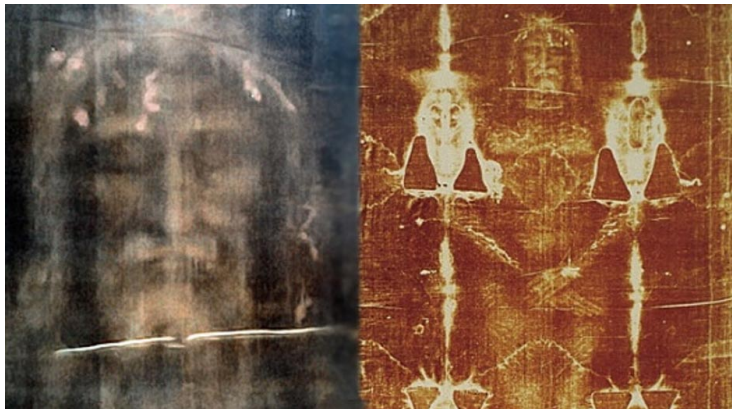
$$x'(t) = -k x(t), \quad x(0) = x_0,$$

on  $k$  depèn de l'element estudiat.

- Pel carboni 14, se sap que **en uns 5730 anys, la quantitat es redueix a la meitat**, i això ens permet trobar  $k$ .
- Resolent l'equació diferencial obtenim

$$x(t) = x_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{5730}} = x_0 2^{-\frac{t}{5730}}.$$

# Datació del Sant Sudari de Torí



P. E. Damon *et al*, [Radiocarbon dating of the Shroud of Turin](#), *Nature*. 337 (1989), 611–615.

# Datació del Sant Sudari de Torí

- L'any 1988, amb l'autorització del Vaticà, els laboratoris de l'Escola Politècnica Federal de Zuric, la Universidad d'Oxford i la d'Arizona van datar el sudari amb aquest mètode.
- Simplificant, van veure que la quantitat de  $C^{14}$  present al sudari era entre el **92 i el 93 per cent** del que tindria si fos un ésser viu.
- Recordem que la quantitat de  $C^{14}$  és:

$$x(t) = x_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{5730}} = x_0 2^{-\frac{t}{5730}}.$$

- Imposant que  $x(t_1) = 0.92 x_0$  o que  $x(t_2) = 0.93 x_0$  obtenim que:

$$t_1 = -5730 \frac{\ln(0.92)}{\ln 2} \approx 689, \quad t_2 = -5730 \frac{\ln(0.93)}{\ln 2} \approx 600.$$

Per tant, com que les proves es van fer al 1988, es conclou que el **sudari és de l'Edat Mitjana**, d'entre 1299 i 1388. Més precisament, al treball de Nature es diu que és d'entre 1260 i 1390, amb un 95% de confiança.

- En resum, segons aquest estudi el sudari no és de l'època de Crist.

# Uns quants models més

- Perquè es veu l'arc de Sant Martí doble?
- Llei de Newcomb-Benford
- Com s'absorbeix un medicament o l'alcohol a la sang?
- Com funciona la datació per  $C^{14}$ ?
- Quant triga a buidar-se un dipòsit d'aigua?
- Com seria una clepsidra (rellotge d'aigua) ideal?
- Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?
- ...

# La clepsidra o rellotge d'aigua

Els rellotges d'aigua ja s'usaven a Mesopotàmia fa més de 3000 anys.



Veurem com usant la llei de Torricelli podem saber a quina velocitat es buiden.



# La clepsidra o rellotge d'aigua



$$\frac{d(\text{volum al instant } t)}{dt} = -(\text{\`area del forat}) \times (\text{velocitat de sortida}),$$

**Llei de Torricelli (1608-1647):** la velocitat de sortida es  $\sqrt{2gy}$ , on  $y$  ens dóna l'alçada de l'aigua respecte on hi ha el forat, que té àrea  $S$ .

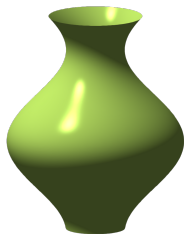
Matemàticament:

$$\frac{d(V(y(t)))}{dt} = -S\sqrt{2gy(t)}.$$

# La clepsidra o rellotge d'aigua

$$\frac{d(V(y(t)))}{dt} = -S\sqrt{2gy(t)}.$$

on  $y(t)$  és l'alçada d'aigua a l'instant  $t$ .



Per figures de revolució,  $V(y) = \pi \int_0^y f^2(s) ds$ , on  $f(y)$  és la funció que ens dóna el perfil a alçada  $y$ , i per tant, si el forat està a la base,

$$\pi f^2(y(t))y'(t) = -S\sqrt{2gy(t)}.$$

# La clepsidra o rellotge d'aigua

L'equació diferencial que ens diu com es buida un cos de revolució, amb un forat d'àrea  $S$  a la base, és:

$$y'(t) = -\frac{S\sqrt{2g}}{\pi} \frac{\sqrt{y(t)}}{f^2(y(t))}, \quad y(0) = y_0 \text{ (alçada d'aigua al principi).}$$

Per exemple, per un recipient cilíndric amb base de radi  $\ell$ ,  $f(y) \equiv \ell$ , l'equació diferencial és

$$y'(t) = -\frac{S\sqrt{2g}}{\pi\ell^2} \sqrt{y(t)}, \quad y(0) = y_0.$$

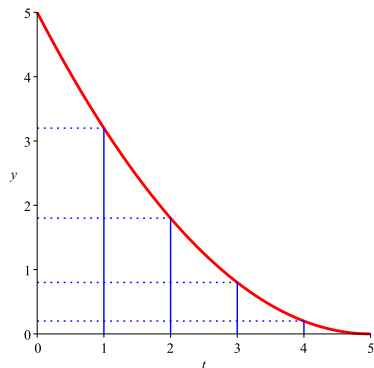
Resolent-la s'arriba a:

$$y(t) = \left( \sqrt{y_0} - \frac{S\sqrt{2g}}{2\pi\ell^2} t \right)^2$$

i per tant el **temps de buidatge del dipòsit**,  $t = t^*$ , és la solució de  $y(t^*) = 0$ , és a dir,

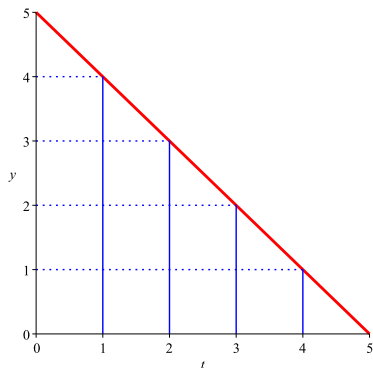
$$t^* = \frac{2\pi\ell^2\sqrt{y_0}}{S\sqrt{2g}}.$$

# La clepsidra o rellotge d'aigua



Buidatge dipòsit cilíndric

$$y(t) = (\sqrt{y_0} - kt)^2$$



Buidatge clepsidra ideal

$$y(t) = y_0 - kt.$$

# Clepsidra ideal

Sabem que

$$y'(t) = -\frac{S\sqrt{2g}}{\pi} \frac{\sqrt{y(t)}}{f^2(y(t))}, \quad y(0) = y_0,$$

i volem que

$$y(t) = y_0 - kt.$$

Per tant, anomenant  $u = y(t) = y_0 - kt$ ,

$$-k = -\frac{S\sqrt{2g}}{\pi} \frac{\sqrt{u}}{f^2(u)}.$$

D'on es dedueix que

$$f(u) = \sqrt{\frac{S}{\pi k}} \sqrt[4]{2g} \sqrt[4]{u} = \alpha \sqrt[4]{u}, \quad \text{on} \quad \alpha = \sqrt{\frac{S}{\pi k}} \sqrt[4]{2g}.$$

# Clepsidra ideal

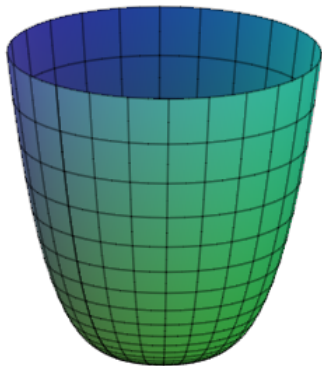
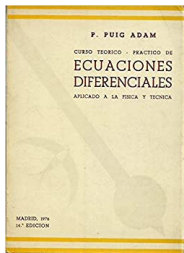


Figura de revolució, amb perfil  $(\alpha\sqrt[4]{y}, y)$ , és a dir  $(x, \beta x^4)$ ,  $\beta = \alpha^{-4}$ .

# Uns quants models més

- Perquè es veu l'arc de Sant Martí doble?
- Llei de Newcomb-Benford
- Com s'absorbeix un medicament o l'alcohol a la sang?
- Com funciona la datació per  $C^{14}$ ?
- Quant triga a buidar-se un dipòsit d'aigua?
- Com seria una clepsidra (rellotge d'aigua) ideal?
- Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?
- ...

# Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?



En el llibre clàssic: [Ecuaciones diferenciales](#), de P. Puig Adam, l'autor explica que si imposem que tots els punts de la Torre suporten la mateixa pressió, arribem a

$$k = \text{pressió} = \frac{\text{pes superior}}{\text{àrea de la secció}} = \frac{P + \delta \int_0^y S(s) ds}{S(y)},$$

on  $S(y)$  és l'àrea de la secció que està a alçada  $y > 0$ , el punt més alt de la torre és  $y = 0$  i les  $y > 0$  són cap avall.



# Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?

Derivant

$$k = \text{pressió} = \frac{\text{pes superior}}{\text{àrea de la secció}} = \frac{P + \delta \int_0^y S(s) ds}{S(y)},$$

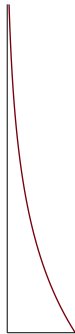
arribem a  $kS'(y) = \delta S(y)$ , és a dir,

$$S'(y) = \frac{\delta}{k} S(y), \quad S(0) = S_0.$$

Resolent l'equació diferencial:  $S(y) = S_0 e^{\frac{\delta}{k} y}$ . Si suposem que el perfil es quadrat, amb costat  $a(y)$ , aleshores  $S(y) = a^2(y)$  i

$$a(y) = a_0 e^{\frac{\delta}{2k} y}.$$

# Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?



# Perquè la Torre Eiffel té la forma que té?

El model que hem presentat és molt senzill i avui en dia es pensa que Eiffel va tenir en compte també la força del vent, però ell no va deixar escrit com ho va fer. Per més detalls consultar:

- J. Gallant, [La forma de la Torre Eiffel](#), Am. J. of Phys. 70, 2 (Feb 2002).
- P. Weidman and I. Pinelis, [Model equations for the Eiffel Tower profile: historical perspective and new results](#), C. R. Mecanique 332 (2004) 571-584.
- J. Ildefonso Díaz, [Matemáticas que sustentan columnas, torres y rascacielos](#), Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. 103 (2009) , 231-251.

# Índex de la xerrada

- 1 Predicció del futur?
- 2 Un primer exemple detallat: la població del món
- 3 Efecte papallona
- 4 Rècords
- 5 Altres exemples
- 6 Encara més....

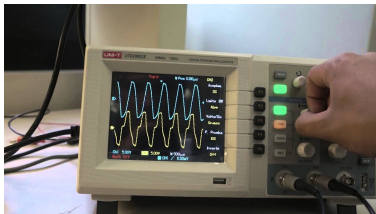
# Més models



Models del trànsit



Economia matemàtica

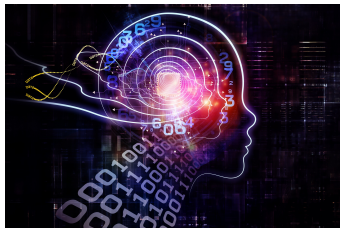


Models per l'enginyeria



Patrons a la natura

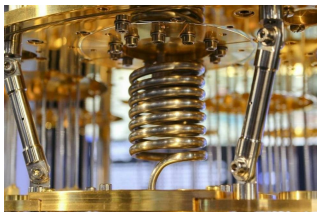
# Més models



Intel·ligència artificial



Criptografia



Matemàtica industrial

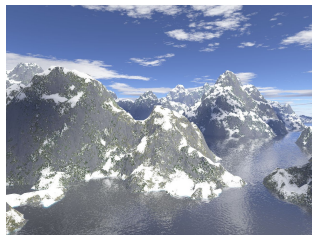


Dinàmica de fluids

# Més models



Cinètica química



Models fractals



Teoria de jocs



Optimització

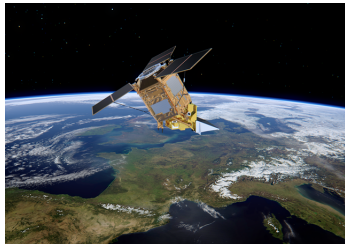
# Més models ...



Models d'epidèmies



Imatges mèdiques



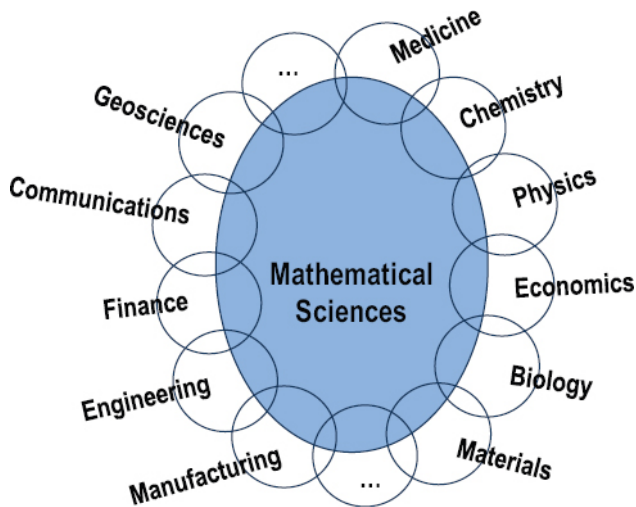
Satèl·lits



Grafs i xarxes

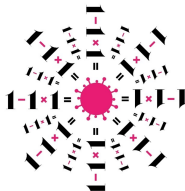


# Les matemàtiques i les altres disciplines



# Matemàtiques i Covid-19

## JORNADES **SCM** MATEMÀTIQUES I **COVID-19**



**13-14 de juliol 2020**  
Plataforma virtual **IEC**

- Introducció als models matemàtics en epidemiologia,
- Recerca matemàtica al voltant de la Covid-19,
- Debats de la comunitat matemàtica al voltant de la Covid-19.



**DIA** INTERNACIONAL DE LES  
**MATEMÀTIQUES**  
14 MARÇ



Moltes gràcies per la vostra atenció