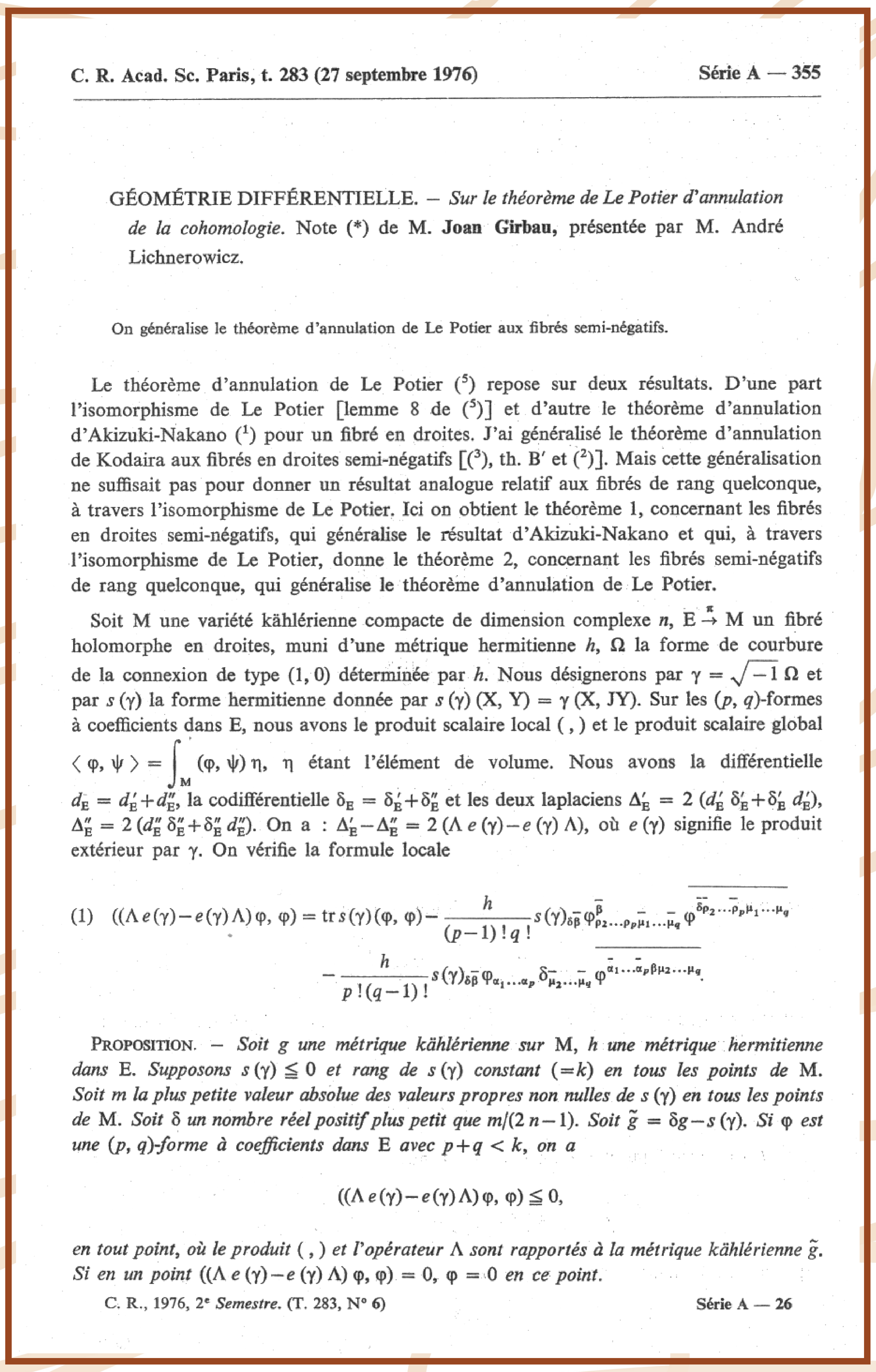
Joan Girbau i Badó, Barcelona 1942

TEOREMA

Sigui M una varietat kähleriana compacta. Sigui $\pi\colon E \to M$ un fibrat holomorf en rectes. Suposem que $c_1(E) \leq 0$ amb rang $c_1(E) \geq k$. Llavors

$$H^{p,q}(E) = 0, \quad \textit{si} \;\; p+q<k.$$

Aquest resultat va ser publicat als Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris l'any 1976, en una nota que du per títol *Sur le théorème de Le Poitier d'annulation de la cohomologie* i de la qual en reproduïm una de les pàgines. El teorema inclou com a casos particulars teoremes d'anul·lació clàssics de Kodaira, d'Akizuki-Nakano i de Vesentini i, per a la seva demostració, Girbau estableix una extensió de l'anomenada desigualtat de Nakano. En el mateix article es dedueix, mitjançant l'isomorfisme de Le Poitier, un teorema d'anul·lació anàleg per a la cohomologia a valors en fibrats holomorfs de rang superior.



C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283 (27 septembre 1976) Série A — 355

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur le théorème de Le Potier d'annulation de la cohomologie*. Note (*) de M. **Joan Girbau,** présentée par M. André Lichnerowicz.

On généralise le théorème d'annulation de Le Potier aux fibrés semi-négatifs.

Le théorème d'annulation de Le Potier ([5]) repose sur deux résultats. D'une part l'isomorphisme de Le Potier [lemme 8 de ([5])] et d'autre le théorème d'annulation d'Akizuki-Nakano ([1]) pour un fibré en droites. J'ai généralisé le théorème d'annulation de Kodaira aux fibrés en droites semi-négatifs [([3]), th. B′ et ([2])]. Mais cette généralisation ne suffisait pas pour donner un résultat analogue relatif aux fibrés de rang quelconque, à travers l'isomorphisme de Le Potier. Ici on obtient le théorème 1, concernant les fibrés en droites semi-négatifs, qui généralise le résultat d'Akizuki-Nakano et qui, à travers l'isomorphisme de Le Potier, donne le théorème 2, concernant les fibrés semi-négatifs de rang quelconque, qui généralise le théorème d'annulation de Le Potier.

Soit M une variété kählérienne compacte de dimension complexe n, $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré holomorphe en droites, muni d'une métrique hermitienne h, Ω la forme de courbure de la connexion de type $(1, 0)$ déterminée par h. Nous désignerons par $\gamma = \sqrt{-1}\,\Omega$ et par $s(\gamma)$ la forme hermitienne donnée par $s(\gamma)(X, Y) = \gamma(X, JY)$. Sur les (p, q)-formes à coefficients dans E, nous avons le produit scalaire local $(\,,\,)$ et le produit scalaire global $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M (\varphi, \psi)\,\eta$, η étant l'élément de volume. Nous avons la différentielle $d_E = d'_E + d''_E$, la codifférentielle $\delta_E = \delta'_E + \delta''_E$ et les deux laplaciens $\Delta'_E = 2(d'_E\,\delta'_E + \delta'_E\,d'_E)$, $\Delta''_E = 2(d''_E\,\delta''_E + \delta''_E\,d''_E)$. On a : $\Delta'_E - \Delta''_E = 2(\Lambda\,e(\gamma) - e(\gamma)\,\Lambda)$, où $e(\gamma)$ signifie le produit extérieur par γ. On vérifie la formule locale

$$(1) \quad ((\Lambda\,e(\gamma) - e(\gamma)\,\Lambda)\,\varphi, \varphi) = \operatorname{tr} s(\gamma)(\varphi, \varphi) - \frac{h}{(p-1)!\,q!}\, s(\gamma)_{\delta\bar\beta}\, \varphi^{\bar\beta}_{\rho_2\ldots\rho_p\bar\mu_1\ldots\bar\mu_q}\, \overline{\varphi^{\bar\delta\bar\rho_2\ldots\bar\rho_p\mu_1\ldots\mu_q}} - \frac{h}{p!\,(q-1)!}\, s(\gamma)_{\delta\bar\beta}\, \varphi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\bar\delta\bar\mu_2\ldots\bar\mu_q}\, \overline{\varphi^{\bar\alpha_1\ldots\bar\alpha_p\beta\mu_2\ldots\mu_q}}.$$

PROPOSITION. — *Soit g une métrique kählérienne sur* M, *h une métrique hermitienne dans* E. *Supposons $s(\gamma) \leqq 0$ et rang de $s(\gamma)$ constant $(=k)$ en tous les points de* M. *Soit m la plus petite valeur absolue des valeurs propres non nulles de $s(\gamma)$ en tous les points de* M. *Soit δ un nombre réel positif plus petit que $m/(2n-1)$. Soit $\tilde g = \delta g - s(\gamma)$. Si φ est une (p, q)-forme à coefficients dans* E *avec $p+q<k$, on a*

$$((\Lambda\,e(\gamma) - e(\gamma)\,\Lambda)\,\varphi, \varphi) \leqq 0,$$

en tout point, où le produit $(\,,\,)$ et l'opérateur Λ sont rapportés à la métrique kählérienne $\tilde g$. Si en un point $((\Lambda\,e(\gamma) - e(\gamma)\,\Lambda)\,\varphi, \varphi) = 0$, $\varphi = 0$ en ce point.

C. R., 1976, 2e *Semestre*. (T. 283, N° 6) Série A — 26

Nombroses obres utilitzen i citen el teorema de Girbau i algunes d'elles donen la seva demostració completa, com el llibre de B. Shiffman i A. J. Sommese, *Vanishing theorems on complex manifolds*, Birkhäuser, Boston, 1985, o el llibre de S. Kobayashi *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton University Press, Tokyo, 1987. El 1981 G. Gigante va donar una nova demostració del resultat per mètodes diferents.

Posteriorment Girbau va establir teoremes d'anul·lació similars en el context de varietats complexes foliades que li permetrien demostrar resultats d'estabilitat de foliacions holomorfes, alguns dels quals estan publicats en l'article *Vanishing cohomology theorems and stability of complex analytic foliations*, Israel J. Math. **40** (1981), 235–254. Aquesta línia de recerca el portaria a contribuir en el desenvolupament de la teoria de deformacions de foliacions holomorfes i transversalement holomorfes publicant, conjuntament amb A. Haefliger i D. Sundararaman, l'article *On deformations of transversely holomorphic foliations*, J. Reine Angew. Math. **345** (1983), 122–147.

Breu nota biogràfica

Joan Girbau i Badó va néixer a Barcelona l'any 1942. Va estudiar a la Universitat de Barcelona, on obtingué el títol de Doctor el 1971. Entre 1970 i 1972 fou becari al Collège de France on va treballar amb André Lichnerowicz. El 1974 passà a ser professor agregat a la Universitat Autònoma de Barcelona i catedràtic a la mateixa Universitat l'any 1976.

És el creador del grup d'investigació en geometria diferencial de la UAB. Ha publicat nombrosos treballs en aquesta àrea de recerca. També s'ha interessat en la teoria de la relativitat, camp en el que ha obtingut diversos resultats, la majoria dels quals es poden trobar en el llibre *Stability by Linearization of Einstein's Field Equation*, Birkhäuser, 2010, escrit conjuntament amb Lluís Bruna. També s'ha de destacar la seva monografia *Geometria Diferencial i Relativitat*, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona, 1993. Així mateix ha publicat nombrosos treballs de divulgació, com per exemple el que du el provocatiu títol de *Si no es pot representar cap terreny a escala, què fan els cartògrafs?* Fundació Caixa Sabadell, 1990.

Menció especial mereix la seva faceta com a tècnic en gnomònica destacant el seu rellotge de sol de precisió a la façana de la Facultat de Ciències de la UAB. És el creador del *Zenitògraf Solar*, un aparell semblant a un rellotge de sol però que indica el punt de la terra des del qual es veu el sol en el zenit en el moment de l'observació.

També ha estat President de la Societat Catalana de Matemàtiques, durant el període 1986-1990, i vice-president durant el període 1990-94. És membre numerari de l'Institut d'Estudis Catalans des de 1990.

Reconeixements més importants

Medalla Narcís Monturiol al mèrit científic i tecnològic, concedida per la Generalitat de Catalunya, el 1997, "per la seva tasca acadèmica, per les seves contribucions a la geometria i topologia i en particular a les varietats complexes i les foliacions holomorfes, i també per la seva activitat de promoció de la matemàtica".

UAB
Universitat Autònoma de Barcelona