

Els avantpassats d'un abellot



a_n = avantpassats en la generació n

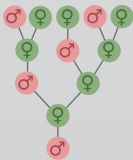
$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 3$$

$$a_4 = 5$$

a_{n-1} enèsim nombre de Fibonacci



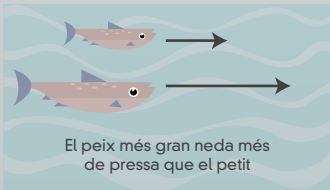
La velocitat òptima de natació

f energia consumida, v velocitat,
 w pes, A àrea de la secció, L longitud

$$f(v) = \frac{C_1 w}{v} + C_2 A v^2$$

$$\Rightarrow v_{opt} = \sqrt[3]{\frac{C_1 w}{2C_2 A}}$$

$$w \propto L^3, A \propto L^2 \Rightarrow v_{opt} \propto \sqrt[3]{L}$$



Equilibri de Hardy-Weinberg

Freqüència inicial del genotip AA : p_0

Freqüència inicial del genotip Aa : q_0

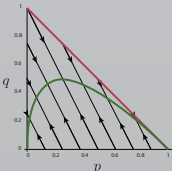
$$p_0 + q_0 \leq 1 \text{ (Freqüència d' } aa : 1 - p_0 - q_0 \text{)}$$

Freqüències generacions següents :

$$(p_1, q_1) = g(p_0, q_0) =$$

$$\left(\left(p_0 + \frac{q_0}{2} \right)^2, 2 \left(p_0 + \frac{q_0}{2} \right) \left(1 - p_0 - \frac{q_0}{2} \right) \right)$$

$$g \circ g = g \Rightarrow (p_n, q_n) = (p_1, q_1)$$



Poblacions estructurades



x_n població d'individus subadults

y_n població d'individus adults

$$\vec{p}_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A \vec{p}_{n-1}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_n = A^n \vec{p}_0 \Rightarrow \vec{p}_n \simeq c \lambda^n \vec{v}$$

on $A \vec{v} = \lambda \vec{v}$, $\vec{v} > 0$

λ constant de Malthus

\vec{v} distribució d'edat estable

Ecologia a temps continu

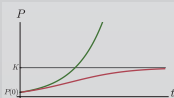
Llei de Malthus

$$P'(t) = r P(t) \Rightarrow P(t) = P(0) e^{rt}$$

Llei de Verhulst

$$P'(t) = r \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) P(t)$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{P(0) e^{rt}}{1 + \frac{P(0)}{K} (e^{rt} - 1)}$$



El model de Lotka-Volterra

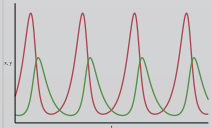
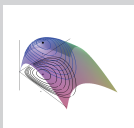
$x(t)$: preses $y(t)$: depredadors



$$\begin{cases} x' = (\alpha - \beta y)x \\ y' = (-\gamma + \delta x)y \end{cases}$$



$$\Rightarrow \alpha \ln y - \beta y + \gamma \ln x - \delta x = C$$



grau d'estadística aplicada grau de matemàtiques

mat.uab.cat/gea mat.uab.cat/gmat

autors Àngel Calsina i Sílvia Cuadrado
(Dpt. Matemàtiques)

disseny Àrea de Planificació de Sistemes d'Informació - APSI